Zusammenfassung

Kernpunkte meines Vortrages über k-Mengen in der Ebene im Seminar Geometrische Aspekte der Graphentheorie SoSe 2004. Der Vortrag bezieht sich auf das Kapitel "k-Sets and k-Facets" des Buches "Geometric Graphs and Arrangements" von Stefan Felsner.

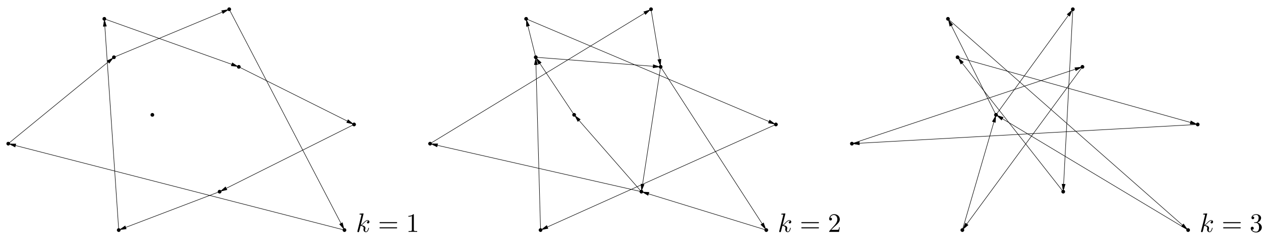
k-Mengen in der Ebene

Zentrales Thema des Vortrages ist eine oberen Schranke für die Anzahl k-Mengen einer Menge P in der Ebene. Dazu werden zuerst Werkzeuge bereit gestellt, dann wird damit ein relativ neuer Beweis für die Schranke gegeben.

Generalannahme: Sei P eine Menge von n Punkten in der Ebene in allgemeiner Lage, das heißt, dass je drei Punkte nie auf einer Geraden liegen.

Definition: Eine k-Menge ist eine k-elementige Teilmenge S von P, sodass S und $\bar{S} = P \backslash S$ durch eine Gerade getrennt werden können.

Definition: Eine k-Kante von P ist eine gerichtete Kante mit Endpunkten in P, sodass sich auf der positiven (linken) Seite der Geraden, auf der die Kante liegt, genau k Elemente von P befinden.



Beobachtung: Sei $1 \leq k < n$. Die Anzahl von k-Mengen in P ist gleich der Anzahl von $(k-1)$-Kanten von P (durch diese Beobachtung genügt es, sich mit $(k-1)$-Kanten statt mit k-Mengen zu beschäftigen).
Beweisidee: Konstruktion einer Bijektion zwischen k-Mengen und $(k-1)$-Kanten

Abwechslungs-Lemma: Sei p aus P und ℓ eine gerichtete Linie, die von p in zwei Hälften geteilt wird. Bei Rotation von ℓ im Uhrzeigersinn um p überstreicht die vordere Hälfte von p ausgehende k-Kanten (out-events) und die hintere Hälfte in p ankommende k-Kanten (in-events). Out-events und in-events wechseln sich bei der Rotation ab.
Beweisidee: Bei Rotation der Linie um den Punkt achte man auf in- und out-events und zähle, wieviele Punkte links von der Linie liegen.
Daraus folgt, dass an jedem Punkt die Anzahl ein- und ausgehender k-Kanten gleich ist.

Lemma 2: Sei p ein Punkt aus P in einer Linie ℓ und $k < \frac{n-1}{2}$. Sei a die Anzahl der auf der einen (positiven) Seite in p eingehenden k-Kanten. Dann:

* Enhält die positive Seite höchstens k Punkte, dann ist die Anzahl der von p zur negativen Seite ausgehenden k-Kanten $a+1$.
* Enhalten beide Seiten mehr als k Punkte, dann ist die Anzahl der von p zur negativen Seite ausgehenden k-Kanten a.
* Enhält die negative Seite höchstens k Punkte, dann ist die Anzahl der von p zur negativen Seite ausgehenden k-Kanten $a-1$.

Beweisidee: Man betrachte wie zuvor Rotationen der Linie um den Punkt, einmal mit dem Uhrzeigersinn, einmal gegen ihn. Dabei beobachte man, was für ein event in welchem Fall zuerst eintritt und benutzt dann das Abwechslungslemma.

Lovász-Lemma: Sei ℓ eine mit P disjunkte Linie, die P in eine linke Menge S mit $|S| = s$ und eine rechte Menge $\bar{S}$ teilt, und $0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$. Die Anzahl $e_k(\ell)$ der ℓ von links nach rechts überquerenden k-Kanten ist genau $min(k+1, s, n-s)$.

in LaTeX gesetzt von Steffen Melang
mail an: pepper@chaosbeatcombo.de

Beweisidee: Bewege eine senkrechte Linie von links nach rechts über die Menge und zähle mit Lemma 2 die Kanten, die diese überqueren.

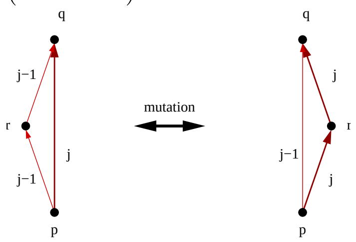
Satz: Eine Menge von n Punkten besitzt höchstens $O(n\sqrt{k})$ k-Kanten.
Beweisidee 1: Teile die Ebene mit $n-1$ Linien in n Streifen mit je einem Punkt. Schätze mit dem Lovász-Lemma kreuzen die Anzahl der Schnittpunkte. Unterscheide zwischen langen und kurzen k-Kanten ein, schätze deren Anzahl ab und vergeleiche mit der Anzahl der Schnittpunkte.
Beweisidee 2: Das Lovász-Lemma liefert, dass jede k-Kante von höchstens $2k$ Kanten gekreuzt wird. Benutze das Crossing-Lemma.

Notation: e_j Anzahl j-Kanten, $E_k = \sum\limits_{j=0}^{k} e_j$

Satz: Eine Menge von n Punkten besitzt höchstens $O(n\sqrt[3]{k})$ k-Kanten.
Beweisidee: Benutze das nachstehende Lemma für $cr(G_k) \leq E_{k-1}$, reichlich Überlegung für $E_{k-1} \leq kn$ und anschließend das Crossing-Lemma.

Lemma: Sei $k \leq \frac{n-3}{2}$ und $deg_k^+(p)$ der aus-Grad eines Punktes p im Graphen G_k. Dann gilt:
$cr(G_k) + \sum\limits_{p \in P} \binom{deg_k^+(p)}{2} = E_{k-1}$.
Beweisidee: Beweise die Aussage für Punkte in konvexer Lage. Dann bewege diese und beobachte die Gleichung dabei. Entscheidend sind Bewegungen durch Kollinearitäten (Mutationenen).

- konvexe Lage: einfaches Zählen
- Bewegung der Punkte: Betrachte, wie ein Punkt r eine j-Kante zwischen den Punkten p und q überquert (Mutation).



  Wichtig sind für die Gleichung nur Mutationen mit $j = k$ oder $j = k+1$. Verfahre für beide Arten wie folgt:

- rechte Seite der Gleichung: Überlege mögliche Veränderung durch einfaches Zählen der Kanten.
- linke Seite der Gleichung: Binomialkoeffizient verändert sich um s. Lege wieder eine Linie durch den Punkt r, wende das Abwechslungslemma für den Grad von r und zweimal Lemma 2 an, um mit geschickten Überlegungen die Veränderung der Kreuzungzahl zu ermitteln.

Ausblick: Statt oberen kann man natürlich auch untere Schranken für die Anzahl der k-Kanten betrachten. Das liefert eine untere Schranke für die Kreuzungszahl von geradlininigen vollständigen Graphen K_n durch die Beobachtung, dass eine Kreuzung genau dann vorliegt, wenn von vier Knoten alle auf der konvexen Hülle ebendieser Knoten liegen. Damit ist die Kreuzungzahl gleich der Anzahl der 4-elementigen Teilmengen in konvexer Lage (Quadrilaterale). Man zeigt einfach, dass bei mindestens fünf Punkten immer ein Quadrilateral dabei ist. Durch eine Verbindung der untere Schranken für die Anzahl der k-Kanten mit der unteren Schranke für die Quadrilaterale erhält man $\frac{3}{8}\binom{n}{4} \leq cr(K_n) \leq \binom{n}{4}$.

in LaTeX gesetzt von Steffen Melang
mail an: pepper@chaosbeatcombo.de