Wie man eine geschlossene Darstellung der Fibonacci-Zahlen erhält

Sei $G(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$ die erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen. Um ihre geschlossene Darstellung zu erhalten, ist f_n zu bestimmen. Für alle n gilt die bekannte Rekursionsformel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ mit dem Rekursionsboden $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$.
Zuerst multipliziert man die Rekursionsformel für jedes n mit x^{n+2} und summiert dann alle Instanzen der Gleichungen auf.

$$\begin{array}{cccl} & \sum_{n\geq 0} f_{n+2}x^{n+2} & = & \sum\limits_{n\geq 0} f_{n+1}x^{n+2} + \sum\limits_{n\geq 0} f_n x^{n+2} \\ \Leftrightarrow & G(x) - f_1 x - f_0 & = & x(G(x) - f_0) + x^2 G(x) \\ \Leftrightarrow & G(x) - x & = & xG(x) + x^2 G(x) \\ \Rightarrow & G(x) & = & \dfrac{x}{1 - x - x^2} \end{array}$$

Die Nullstellen des Nenners sind die Zahlen des Goldenen Schnittes, nämlich $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x}{1 - x - x^2} \\ &= \frac{A}{\frac{2}{-1+\sqrt{5}}x - 1} + \frac{B}{\frac{2}{-1-\sqrt{5}}x - 1} \end{aligned}$$

Die Partialbruchzerlegung liefert $A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Also gilt:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{2}{-1+\sqrt{5}}x} - \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{1 - \frac{2}{-1-\sqrt{5}}x}$$

Mit den bekannten Tatsachen über die geometrische Reihe folgt:

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}x\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}x\right)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \left[\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^n - \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)^n\right) x^n\right] \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{2}{-1+\sqrt{5}}\right)^n - \left(\frac{2}{-1-\sqrt{5}}\right)^n\right]$$

Dieses Ergebnis lässt sich leicht per Induktion beweisen. Das zugrunde liegende Verfahren kann man in Kapitel 8 des Buches “A walk through Combinatorics“ von Miklós Bóna, erschienen 2002 bei World Scientific, nachlesen.

in LaTeX gesetzt von Steffen Melang
mail an: pepper@chaosbeatcombo.de